Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Tussen twee grafieken

1 maximumscore 3

- Voor de x-coördinaat van Q geldt: $\sqrt{1-x} = p$ 1
- Dus $1-x = p^2$ 1
- De x-coördinaat van Q is dus $1-p^2$ 1

of

- Er moet gelden: $f(1-p^2) = p$ 1
- $f(1-p^2) = \sqrt{1-(1-p^2)}$ 1
- Dus $f(1-p^2) = \sqrt{p^2}$ en dit is (omdat $p>0$) gelijk aan p 1

2 maximumscore 6

- $PQ = 1-p^2-p$ 1
- De oppervlakte van de rechthoek is $p(1-p^2-p) = p-p^3-p^2$ 1
- De afgeleide hiervan is $1-3p^2-2p$ 1
- $-3p^2-2p+1=0$ geeft $p=\dfrac{2+\sqrt{16}}{-6}$ of $p=\dfrac{2-\sqrt{16}}{-6}$
  (of: $p^2+\frac{2}{3}p-\frac{1}{3}=0$, dus $(p-\frac{1}{3})(p+1)=0$) 2
- ($p>0$, dus) het antwoord is $p=\frac{1}{3}$ 1

3 **maximumscore 6**

- De inhoud is $\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\,\mathrm{d}x$ — 2
- Een primitieve van $1-x$ is $x-\frac{1}{2}x^2$ — 1
- Een primitieve van x^2 is $\frac{1}{3}x^3$ — 1
- De inhoud van het omwentelingslichaam is $\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{24}\pi=\frac{1}{3}\pi$ — 2

of

- De inhoud is $\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\,\mathrm{d}x$ verminderd met de inhoud van een kegel — 2
- Een primitieve van $1-x$ is $x-\frac{1}{2}x^2$ — 1
- $\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\pi$ — 1
- De inhoud van de kegel is $\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}\pi$ — 1
- De inhoud van het omwentelingslichaam is $\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{24}\pi=\frac{1}{3}\pi$ — 1

Opmerking

Als de inhoud (foutief) berekend is met $\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-x}-x\right)^2\mathrm{d}x$*, voor deze vraag geen scorepunten toekennen.*

Raakcirkels aan een lijn

4 maximumscore 4

- $\angle GFR = \angle HFS$ (of: $\angle FRG = \angle FSH$; *F-hoeken*) 1
- Verder $\angle FGR = \angle FHS$ $(= 90°)$, dus $\Delta FRG \sim \Delta FSH$; *hh* 1
- Uit ($FG = GH$, dus) $FH = 2 \cdot FG$ volgt nu $FS = 2 \cdot FR$ 1
- Dus $FR = RS$ 1

of

- Noem de loodrechte projectie van *S* op *k T*. Dan geldt: $\angle SRT = \angle FRG$; *overstaande hoeken* 1
- *SHGT* is een rechthoek, dus $ST = GH$; (*rechthoek*), en $FG = GH$, dus $ST = FG$ 1
- Verder is $\angle STR = \angle FGR$ $(= 90°)$, dus $\Delta SRT \cong \Delta FRG$; *ZHH* 1
- Dus $FR = RS$ 1

of

- Noem de loodrechte projectie van *R* op *m U*. Dan is *RU* evenwijdig met *FH*; (*F-hoeken*), dus $\angle SRU = \angle RFG$; *F-hoeken* 1
- *HGRU* is een rechthoek, dus $RU = GH$; (*rechthoek*), en $FG = GH$, dus $RU = FG$ 1
- Verder is $\angle RUS = \angle FGR$ $(= 90°)$, dus $\Delta SUR \cong \Delta RGF$; *HZH* 1
- Dus $FR = RS$ 1

of

- Noem de lijn door *F* evenwijdig met *k* en *m*: *n*. Dan is (omdat de loodlijn vanuit *F* op *k* en *m* ook loodrecht staat op *n*; *F-hoeken* (of *Z-hoeken*) en $FG = GH$) *k* de middenparallel van *m* en *n*; (*afstand punt tot lijn, middenparallel*) 1
- Hieruit volgt: (*R* heeft gelijke afstanden tot *m* en *n*, dus) $RU = RV$ met *U* en *V* de loodrechte projecties van *R* op respectievelijk *m* en *n*; *middenparallel,* (*afstand punt tot lijn*) 1
- Verder geldt $\angle RUS = \angle RVF$ (90º) en $\angle SRU = \angle FRV$; *overstaande hoeken*, dus $\Delta SRU \cong \Delta FRV$; *HZH* (of: $\angle RSU = \angle RFV$; *Z-hoeken*, dus $\Delta SRU \cong \Delta FRV$; *ZHH*) 1
- Dus $FR = RS$ 1

5 maximumscore 3

- Uit $\Delta FXS \sim \Delta FMR$ volgt $\angle FXS = \angle FMR$ (of $\angle FSX = \angle FRM$), dus $XS // MR$; *F-hoeken* 1
- *MR* staat loodrecht op *k*; *raaklijn*, dus *XS* staat loodrecht op *k*; (*F-hoeken*) 1
- Bovendien $m // k$, dus *XS* staat loodrecht op *m*; (*F-hoeken*) 1

of

- Uit $\Delta FXS \sim \Delta FMR$ volgt $\angle FSX = \angle FRM$. Verder geldt $\angle FSH = \angle FRG$; *F-hoeken* 1
- Dus $\angle XSH = \angle FSX + \angle FSH = \angle FRM + \angle FRG = \angle MRG$ 1
- $\angle MRG = 90°$; *raaklijn*, dus ook $\angle XSH = 90°$ (ofwel *XS* staat loodrecht op *m*) 1

6 maximumscore 3

- Uit $\Delta FXS \sim \Delta FMR$ en $FX = 2 \cdot FM$ (of $FS = 2 \cdot FR$) volgt $XS = 2 \cdot MR$ 1
- $FM = MR$; (*cirkel*) en $FX = 2 \cdot FM$ geeft $FX = 2 \cdot MR$, dus $FX = XS$ 1
- Hieruit en uit $XS \perp m$ volgt dat *XF* gelijk is aan de afstand van *X* tot *m*, dus *X* ligt op de parabool met brandpunt *F* en richtlijn *m*; (*afstand punt tot lijn*, *parabool*) 1

of

- $\angle FRX = 90°$; *Thales* en $FR = RS$, dus *RX* is middelloodlijn van *FS*; (*middelloodlijn*) 1
- Dit geeft $XF = XS$; *middelloodlijn* 1
- Hieruit en uit $XS \perp m$ volgt dat *XF* gelijk is aan de afstand van *X* tot *m*, dus *X* ligt op de parabool met brandpunt *F* en richtlijn *m*; (*afstand punt tot lijn*, *parabool*) 1

Extrusie

7 maximumscore 3

- De omtrek van de grote opening is *k* keer zo groot als die van de kleine 1
- De oppervlakte van de grote opening is k^2 keer zo groot als die van de kleine 1
- Voor de grote opening is $\sqrt{A}$ dus *k* keer zo groot als voor de kleine, dus (wegens $\frac{k}{k} = 1$) het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ is voor beide openingen even groot 1

Vraag	Antwoord	Scores

8 maximumscore 8

- $P = 4 + \int_{-2}^{2} \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ $\left(= 4 + \int_{-2}^{2} \sqrt{1+(-1\frac{1}{2}x)^2}\,dx\right)$ — 2
- Beschrijven hoe de integraal kan worden berekend — 1
- $P \approx 11{,}54\,(\text{cm})$ — 1
- $A = \int_{-2}^{2} (3 - \frac{3}{4}x^2)\,dx$ — 1
- Beschrijven hoe de integraal kan worden berekend — 1
- $A = 8\ (\text{cm}^2)$ — 1
- $\frac{P}{\sqrt{A}} \approx \frac{11{,}54}{\sqrt{8}}$, dus het antwoord is 4,1 — 1

9 maximumscore 5

- Voor een opening van x bij 1 is $P = 2x+2$ en $A = x$ — 1
- Het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ is dus $\frac{2x+2}{\sqrt{x}}$ — 1
- $\frac{2x+2}{\sqrt{x}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ (of $\frac{2x+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$) — 1
- De afgeleide hiervan is $x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$ (of $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$) — 1
- Deze is 0 als $x = 1$ (dus de x-coördinaat van de top is 1) — 1

of

- Voor een opening van x bij 1 is $P = 2x+2$ en $A = x$ — 1
- Het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ is dus $\frac{2x+2}{\sqrt{x}}$ — 1
- De afgeleide hiervan is $\dfrac{2\cdot\sqrt{x} - (2x+2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$ — 1
- Dit is gelijk aan $\frac{x-1}{x\sqrt{x}}$ — 1
- Deze is 0 als $x = 1$ (dus de x-coördinaat van de top is 1) — 1

De formule van Gompertz

10 maximumscore 4

- Dan moet gelden $P(t) = 50$ — 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}} = 50$ kan worden opgelost — 1
- $t \approx 67$ — 1
- Dus 27 jaar na afsluiten van de polis is de helft overleden — 1

11 maximumscore 3

- $119 = 100 \cdot 1{,}19 = 100 \cdot e^{\ln 1{,}19} \approx 100 \cdot e^{0{,}1740}$ — 2
- $P(t) \approx 100 \cdot e^{0{,}1740} \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}} = 100 \cdot e^{0{,}1740 - 0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$, dus $m \approx 0{,}17$ — 1

of

- $100 \cdot e^{m - 0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}} = 100 \cdot e^{m} \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$ — 1
- $100 \cdot e^{m} \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}} = 119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$ geldt als $100 \cdot e^{m} = 119$ — 1
- Dus $m = \ln 1{,}19 \approx 0{,}17$ — 1

12 maximumscore 4

- $P'(t) = a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}} \cdot -b \cdot e^{kt} \cdot k$ — 2
- $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = \dfrac{a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}} \cdot -b \cdot e^{kt} \cdot k}{a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}}} = -b \cdot e^{kt} \cdot k$ — 1
- Dus $c = -bk$ — 1

Goniometrische functies

13 maximumscore 4

- $\sin x + \sin(2x) = \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ — 1
- $\sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$ geeft $\sin x \cdot (1 + 2 \cdot \cos x) = 0$ — 1
- Dus $\sin x = 0$ of $\cos x = -\frac{1}{2}$ — 1
- De x-coördinaat van punt B is $\pi\frac{2}{3}$ — 1

of

- $\sin x + \sin(2x) = \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ — 1
- $\sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$ geeft, omdat $\sin x > 0$ op $\langle 0, \pi \rangle$, $1 + 2 \cdot \cos x = 0$ — 1
- Dus $\cos x = -\frac{1}{2}$ — 1
- De x-coördinaat van punt B is $\frac{2}{3}\pi$ — 1

of

- $\sin x + \sin(2x) = 2 \cdot \sin(1\frac{1}{2}x) \cdot \cos(\frac{1}{2}x)$
  (of $\sin x + \sin(2x) = 2 \cdot \sin(1\frac{1}{2}x) \cdot \cos(-\frac{1}{2}x)$) — 1
- $2 \cdot \sin(1\frac{1}{2}x) \cdot \cos(\frac{1}{2}x) = 0$ geeft $\sin(1\frac{1}{2}x) = 0$ of $\cos(\frac{1}{2}x) = 0$ — 1
- $1\frac{1}{2}x = k \cdot \pi$ of $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ (met k geheel) — 1
- De x-coördinaat van punt B is $\frac{2}{3}\pi$ — 1

of

- $\sin x + \sin(2x) = 0$ geeft $\sin(2x) = \sin(-x)$ — 1
- Dus $2x = -x + k \cdot 2\pi$ of $2x = \pi + x + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) — 1
- Dus $x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) — 1
- De x-coördinaat van punt B is $\frac{2}{3}\pi$ — 1

14 maximumscore 5

- $f_a'(x) = \cos x + 2a \cdot \cos(2x)$ — 1
- Er moet gelden: $\cos(\frac{5}{6}\pi) + 2a \cdot \cos(\frac{5}{3}\pi) = 0$ — 1
- Dus $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2a \cdot \frac{1}{2} = 0$ en hieruit volgt $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
  (of $a = \dfrac{-\cos\frac{5}{6}\pi}{2 \cdot \cos\frac{5}{3}\pi} \approx 0{,}866$) — 1
- Beschrijven hoe de x-coördinaat van de andere top van de grafiek van $f_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$ (of van $f_{0{,}866}$) gevonden kan worden — 1
- Het antwoord is 0,96 — 1

15 maximumscore 5

- De oppervlakte is $\int_0^{\pi}(\sin x + a\cdot\sin(2x))\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\sin x + a\cdot\sin(2x)$ is $-\cos x - \frac{1}{2}a\cdot\cos(2x)$ 2
- De oppervlakte is dus $(1-\frac{1}{2}a)-(-1-\frac{1}{2}a)=2$ (en dit is onafhankelijk van a) 2

of

- De oppervlakte is $\int_0^{\pi}(\sin x + a\cdot\sin(2x))\mathrm{d}x$ 1
- De oppervlakte is dus $\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x + a\cdot\int_0^{\pi}\sin(2x)\mathrm{d}x$ 1
- Aantonen dat $\int_0^{\pi}\sin(2x)\mathrm{d}x = 0$ (met behulp van een primitieve of met behulp van symmetrie) 2
- De oppervlakte is dus $\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$ (en dit is onafhankelijk van a) 1

Opmerking
Als de oppervlakte van het vlakdeel voor een aantal waarden van a is berekend en daaruit is geconcludeerd dat deze onafhankelijk van a is, hiervoor geen scorepunten toekennen.

Cirkels bij een driehoek

16 maximumscore 3

- Het middelpunt van de cirkel door D die AB raakt in A, is het snijpunt van de middelloodlijn van AD en de loodlijn op AB door A; (*cirkel, middelloodlijn, raaklijn*) 2
- Het tekenen van (een deel van) deze cirkel met het snijpunt E 1

17 maximumscore 4

- $\angle ABD = \angle BFD$ en $\angle ACD = \angle CFD$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- Dit geeft $\angle BFC = \angle BFD + \angle CFD = \angle ABD + \angle ACD$ 1
- Dus $\angle BFC + \angle BAC = \angle ABD + \angle ACD + \angle BAC = 180°$; *hoekensom driehoek* 1
- Hieruit volgt dat $ABFC$ een koordenvierhoek is; (*koordenvierhoek*) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Vierkant bij een derdegraadskromme

18 maximumscore 8

- $f(x) = 0$ geeft (behalve $x = 0$): $\frac{1}{3}x^2 = b$, dus de x-coördinaat van A is $\sqrt{3b}$ — 1
- $f'(x) = b - x^2$ — 1
- Dus de x-coördinaat van T is $\sqrt{b}$ — 1
- De y-coördinaat van T is $b\sqrt{b} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{b}\right)^3$ — 1
- Rechthoek $OABC$ is een vierkant als $b\sqrt{b} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{b}\right)^3 = \sqrt{3b}$ — 1
- $b\sqrt{b} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{b}\right)^3$ herleiden tot $\frac{2}{3}b\sqrt{b}$ — 1
- $\frac{2}{3}b\sqrt{b} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{b}$ geeft (omdat $b > 0$) $b = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 2